№ 5 дәріс сабағы
1.8 Қайталанған сынақтар. Бернулли формуласы. Муавр-Лапластың локальдік және интегралдық теоремалары. Пуассон теоремасы.

Нәтижелерінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын сынақтарды тәуелсіз сынақтар деп атайды. Тәуелсіз n сынақ жүргізілген. Осы сынақтардың әрқайсысында A оқиғасының пайда болу ықтималдықтары бірдей және тұрақты p-ға тең (пайда болмауы $q=1-p$) болсын. Онда осы тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы Бернулли формуласымен есептеледі:

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k}.$$

$p+q=1$ екенін ескере отырып, оның екі жағын да n дәрежелеп: $(p+q)^n=1$, Ньютон формуласын қолданып,

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+\ldots+P_n(k)+\ldots+P_n(n)=1$$

биномдық қатарды алуға болады.

Ықтималдықтың ең үлкен мән қабылдайтын $k=k_0$ мәнін *ең ықтималды сан* деп атаймыз. Егер $(n+1)p-$ бүтін сан болса, онда екі мән болады: $k_0=(n+1)p-1$ және $k_0=(n+1)p$. Егер $(n+1)p$ - бөлшек сан болса, онда $k_0=[(n+1)p]$, мұндағы $[\ldots]$ белгісі – санның бүтін бөлігі дегенді көрсетеді.

n тәуелсіз сынақ жүргізу нәтижесінде өзара тәуелсіз $A_1,A_2,\ldots,A_k$ оқиғалары сәйкес $p_1,p_2,\ldots,p_k$ ықтималдықтарымен сәйкесінше $m_1,m_2,\ldots,m_k$ рет пайда болсын дейік, мұндағы $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$.

A_1 оқиғасының m_1 рет, A_2 оқиғасының m_2 рет, ..., A_k оқиғасының m_k рет пайда болу ықтималдығы, әрі $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$, мынадай формула бойынша есептелінеді:

$$P_n(m_1,m_2,\ldots,m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!}\cdot p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\ldots\cdot p_n^{m_k}.$$

Бұл ықтималдықтың полиномдық үлестірімі.

n үлкен сан болғанда Бернулли формуласын қолдану үлкен арифметикалық есептеулерге әкеп соғады. Сондықтан да, n - өте үлкен сан және $p>0{,}1$ ($npq>9$ болатындай) болған жағдайда Лапластың локалдық немесе интегралдық теоремалары қолданылады.

Лапластың жергіліктілік (локалдық) теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізілгенде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$$

мұндағы $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $0<p<1$. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының мәнін есептеу үшін дайын кесте (2-қосымша, 1-кесте) қолданылады және $\varphi(-x)=\varphi(x)$ екенін ескеру қажет.

Лапластың интегралдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының k_1-ден кем емес және k_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\ , \tag{4}$$

мұндағы $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.$\Phi(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Лаплас функциясын есептеу үшін дайын кесте (2-қосымша, 2-кесте) қолданылады және $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ екенін ескеру қажет. Лаплас функциясының кестесін қолдану үшін жоғарыдағы формуланы

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1) \tag{5}$$

түрінде қолданған тиімді.

1730 жылы $p=\frac{1}{2}$ дербес жағдайы үшін ғана Муавр асимптоталық формуланы тапты, ал 1783 жылы Муаврдың бұл формуласын 0 мен 1-ден өзге кез келген p үшін жалпылады. Сондықтан да, жоғарыдағы теореманы кейде Муавр-Лапластың теоремасы деп те атайды.

Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ($npq<9$ болатындай) және $\lambda=np$ шамасы тұрақты болған жағдайда *Пуассон формуласы* қолданылады.

Егер $n\to\infty$, $p\to 0$ болып және $\lambda=np\neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{6}$$